

ルール・オブ・サムの導出と予測精度の検証

猪口 雄三

Derivation of “Rules of Thumb” and verification of their prediction accuracies

Yuzo INOKUCHI

1. はじめに

日本語版 AIM (Aeronautical Information Manual) ⁽¹⁾ の第 1 1 章「情報および資料」にルール・オブ・サムの記載がある。フライトに必要な様々な数値をパイロットが飛行中に暗算できるようにした、知恵の集合と考えられる。同様のルール・オブ・サムは海外のパイロット向けハンドブック、国内外のフライトスクール関連ウェブ、フライト関連 Q&A などで見られるが、民間伝承のように様々な亜種ルールが存在し、加えてルールの結果だけが示されていて根拠が示されていないことが多い。おそらく、ルールが提唱された当時は何らかの根拠が示されていたものの、長年伝承されていくうちに根拠が伝承されず結果だけが残ったものと推察される。通常、ルールには速度範囲や高度範囲などの適用範囲があるので、範囲を超えて適用すると結果を誤る可能性がある。そこで本論では、これらのルール・オブ・サムに理論的な根拠を与え、ルールの予測精度を検証することを目的とする。様々な亜種ルールのすべてを検証するのは不可能に近いので、主として日本語版 AIM に記載のルールを対象とする。日本語版 AIM では 50 件ほどのルールが紹介されているが、以下の本論では導出が自明ではない 15 件のルールを検証対象とした。ルール R06 と R07 は日本語版 AIM に記載がないが、ルール R08, R09 の導出に必要なルールであるので本論文の検証対象とした。ルールの予測誤差は原則として、定義式 (理論式) に対する相対誤差で評価する。ただし温度に関してはケルビン、セ氏、華氏のどのスケールで評価するかによって相対誤差の大きさが変わってしまうため絶対誤差で評価する。様々なルールを解析した結果、ルールのほとんどは理論解に対する線形近似であり、予測精度 10% 程度の範囲で暗算できるように考えられたルールとなっていることがわかった。

2. 本論

以下ではルールを R01, R02, ... のように番号づけする。

R01: メートルからフィート

「3倍してその10%を加える」⁽¹⁾

メートル m からフィート ft への換算定義式は $ft = m / 0.3048$ である。変形すると $ft \approx m \times 3.28084 \approx m \times 3.3 = (m \times 3) \times (1 + 0.1)$ となり、これがルール R01 である。この近似式の精度は高く、もとの定義式に対して相対誤差 0.6% 以内である。

R02: km/h から kt

「数値を半分にしてその10%を加える」⁽¹⁾

毎時キロメートル km/h からノット kt への換算式は $[kt] = [km/h] / 1.852$ である。単位 km/h 部分の数値を x とおき、この換算式を変形すると、

$$\frac{x}{1.852} = \frac{x}{2 \times (1 - 0.074)} = \frac{x}{2} (1 - 0.074)^{-1} \approx \frac{x}{2} (1 + 0.074) \approx \frac{x}{2} (1 + 0.1) \quad (1)$$

ここで、 $(1 - 0.074)^{-1}$ 部分に対して付録式 (a3) の線形近似を適用し、加えて最後の部分では 0.074 を 0.1 と近似した。この式 (1) がルール R02 の根拠である。この近似式の精度は相対誤差 2% 以内であり、実用上は十分な精度と考えられる。

R03: 旋回半径

- (a) 「25°バンク角の旋回半径は $(GS/60)^2 \div 9$ 」⁽¹⁾
- (b) 「25°バンク時の旋回半径は $(\text{分速 } nm) - 2$ 」⁽¹⁾
- (c) 「25°バンク時の旋回半径は $(\text{マッハ数}) \times 10 - 2$ 」⁽¹⁾

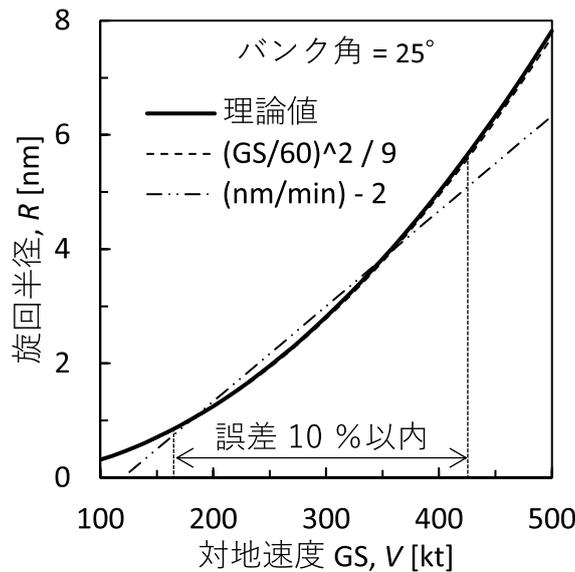


図 1 ルール R03 (対地速度と旋回半径) の近似精度。

重力加速度 g [m/s²] の環境下で質量 m [kg] の機体が対地速度 V [m/s], バンク角 ϕ [°], 半径 R [m] で水平定常旋回しているとき, 揚力 L [N], 重力 mg [N], 遠心力 mV^2/r [N] の釣り合いの式は

$$L \cos \phi = mg \text{ (鉛直方向)}, \quad L \sin \phi = mV^2/R \text{ (水平方向)} \quad (2)$$

これを旋回半径 R について解くと

$$R = \frac{V^2}{g \tan \phi} \quad (3)$$

この問題ではバンク角 ϕ が 25° と固定されているので, あとは左辺の半径 R と右辺の対地速度 V の関係を導けばよい. まず, 左辺の R を nm の単位に, 右辺の V を kt の単位に換算し, 両辺の換算係数と定数とを右辺にまとめると,

$$R [\text{nm}] = \frac{1}{8.88} \left(\frac{V [\text{kt}]}{60} \right)^2 \approx \frac{1}{9} \left(\frac{V [\text{kt}]}{60} \right)^2 \quad (3)'$$

これがルール R03(a) で, 数値 8.88 を 9 と丸めたことによる近似の相対誤差は 1% 程度であり, 十分な精度である.

なお, この単純なつり合いの式 (2) は無風状態で考えた式であるので, ここでは対地速度 (GS) と真対気速度 (TAS) は等しい.

式 (3) や (3)' に示されるように, 旋回半径は旋回速度の 2 次関数であるが, 飛行操縦中にルール R03-(a) を計算するのは難しい. それで暗算しやすいルール R03-(b) が生み出されたものと推察される.

図 1 に理論値 (実線), ルール R03-(a) (破線), ルール R03-(b) (2 点鎖線) を示す. 図の横軸は旋回速度 (対地速度) V [kt], 縦軸は旋回半径 R [nm] である. ルール R03-(b) を用いて, 相対誤差 10% 程度以内で近似できるのは, 速度範囲 170–420 kt に限られる. この速度範囲から判断して, ルール R03-(b) はターボプロップ機・ターボファン機向けのルールと考えられる.

最後にルール R03-(c) であるが, あとで考察するルール R12 を用いると, ルール R03-(b) から R03-(c) を導くことができる.

R04: Standard rate turn のバンク角

- (a) 「(Bank [°]) ≈ TAS / 10 + 7 (TAS 200 [kt] 以下のとき)」⁽¹⁾
- (b) 「(Bank [°]) ≈ TAS / 10 + 10 (TAS 200 [kt] 以上のとき)」⁽¹⁾

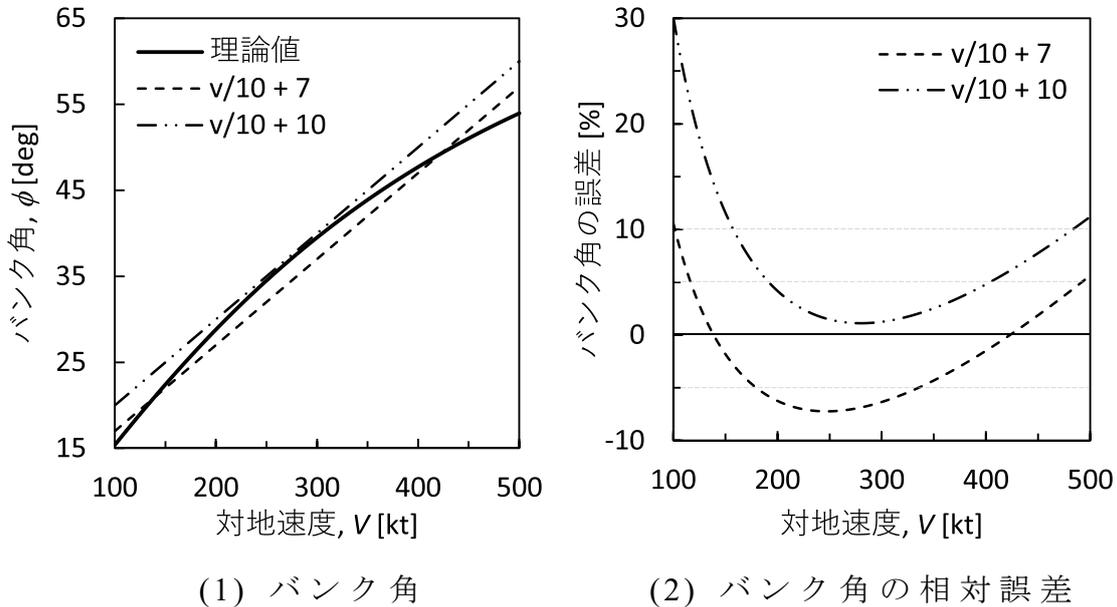


図 2 ルール R04 (対地速度とバンク角) の近似精度.

角速度 ω [rad/s] と関係式 $V = R\omega$ を使って式 (2) を書き換えると,

$$L \cos \phi = mg \text{ (鉛直方向)}, \quad L \sin \phi = mV\omega \text{ (水平方向)} \quad (2)'$$

式 (2)' を ϕ について解くと,

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{V\omega}{g} \right) \text{ [rad]} \quad (4)$$

式 (4) は $(V\omega/g) < 1$ のとき, 付録式 (a4) のように近似できるので,

$$\phi \approx \frac{V\omega}{g} \text{ [rad]} \quad (4)'$$

ここで級数展開の条件 $(V\omega/g) < 1$ を確認する. まず, 標準旋回 standard rate turn では 1 秒間に 3° 旋回するので, 標準旋回の角速度は $\omega = 3^\circ/\text{s} \approx 0.052 \text{ rad/s}$ である. 対地速度 200 kt のとき $V = 200 \text{ kt} \approx 103 \text{ m/s}$ なので, $V\omega/g \approx 103 \times 0.052 / 9.8 \approx 0.5 < 1$ となって, 式 (4) の級数展開の条件を満たすことを確認できた.

ルール R03 と同様, 式 (4) は無風状態で考えた式であるので, ここでは対地速度 (GS) と真対気速度 (TAS) は等しい.

さて、式 (4)' の左辺の角度 ϕ と右辺の角速度 ω の単位を rad(ラジアン) から °(度) に変換しても、式 (4)' の関係は変わらない。速度 V の単位を kt から m/s に変換する係数は 0.51 なので、標準旋回 $\omega = 3^\circ/\text{s}$ のときのバンク角 $\phi [^\circ]$ は

$$\phi [^\circ] \approx \frac{(V [\text{kt}]) \times 0.51 \times (3 [^\circ/\text{s}])}{9.8 [\text{m/s}^2]} \approx \frac{3}{20} \times (V [\text{kt}]) = \frac{V}{10} + \frac{1}{20} \times V \quad (4)''$$

ここで式 (4)'' の右辺第 2 項にのみ $V = 140 \text{ kt}$ を入れて式変形すると、

$$\phi [^\circ] \approx \frac{V}{10} + 7 \quad (5a)$$

また、式 (4)'' の右辺第 2 項にのみ $V = 200 \text{ kt}$ を入れて式変形すると、

$$\phi [^\circ] \approx \frac{V}{10} + 10 \quad (5b)$$

これらの式 (5a), (5b) が、ルール R04-(a), -(b) の根拠と考えられる。式 (5a) と (5b) はそれぞれ、対気速度 140 kt と 200 kt 付近で予測精度が良くなることが期待されるが、速度の大きいほうでは式 (4)' の線形近似による誤差が大きくなるため、必ずしも期待どおりとはならない。

図 2 にルール R04 の近似精度を示す。横軸は対地速度、図 2-(1) の縦軸はバンク角、図 2-(2) の縦軸は理論値に対する相対誤差である。図 2-(1) には式 (4) の理論値を実線で、式 (5a) のルール R04-(a) を破線で、式 (5b) のルール R04-(b) を 2 点鎖線で、それぞれ示す。ルール R04-(b) は 190–370 kt の範囲ではルール R04-(a) よりも精度が高いが、それ以外の速度範囲ではルール R04-(a) のほうが精度がよい。ルール R04-(a) の近似精度は図の横軸に示す速度範囲において 10% 程度以内である。

ルールの予測精度が相対誤差で 10% のとき、例えば取るべきバンク角が 25° であれば、式 (5a) から予測されるバンク角は 22.5° から 27.5° の誤差範囲内にあることになる。

R05: ある高度での標準気温

「フライトレベルの数値を 10 で割り -2 を掛けて 15 を加える」⁽¹⁾

標準大気⁽²⁾の平均海面上での気温は 15°C で、高度に対する気温減率は -6.5 K/km である。気温減率を kft (キロフィート) 単位で表すと $-1.98 \text{ K/kft} \approx -2 \text{ K/kft}$ となるので、ルール R05 は気温減率の定義を計算しやすいように言い換えたものと言える。なお 1.98 を 2 と丸めたことによる絶対誤差は高度によって異なるが、高度 33,000 ft 以下の全高度域で 1 K (1°C) 未満である。

R06: 高度による気圧変化
 「1000 ft ごとに 1 inHg 変化」

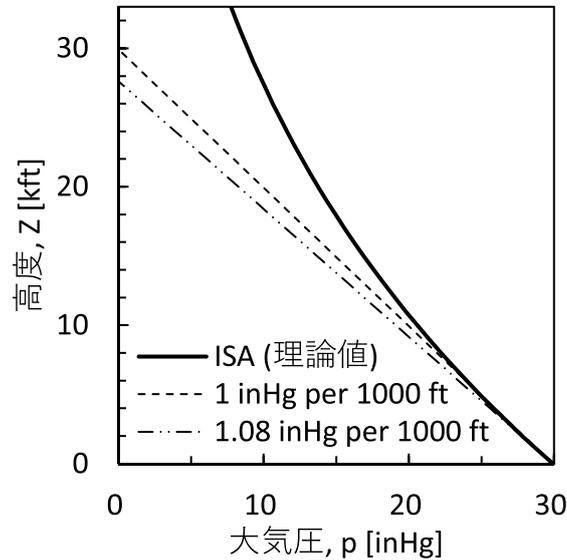


図 3 ルール R06（圧力の高度変化）の近似精度

ルール R06 を明文化した資料を和文では見つけることができなかつたが、国交省の航空従事者等学科試験問題にも出題される、よく知られているルールである。

標準大気における気圧 p [Pa] の高度 Z [m] に対する変化は次式で表される⁽²⁾。

$$\frac{p(Z)}{p_0} = \left[1 + \frac{\beta}{T_0} Z \right]^{-\frac{g}{R\beta}} \quad (6)$$

ここで、重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、空気の気体定数 $R = 287 \text{ J/kg/K}$ 、気温減率 $\beta = -0.0065 \text{ K/m}$ 、平均海面上での気圧 p_0 と気温 T_0 がそれぞれ $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ と $T_0 = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ K}$ である。本来の定義式では平均海面からの高度 Z ではなく、重力ポテンシャルの等値面としてのジオポテンシャル高度 H が使われるが、ほぼ対流圏となる高度 10 km 以下では Z と H の数値の違いは 0.1% 程度であることから、ここでは高度 Z を用いる。式 (6) の括弧の中の項が $\beta Z/T_0 < 1$ であることを利用して、式 (6) に対して付録 (a3) の線形近似を適用すると、

$$\frac{p(Z)}{p_0} \approx 1 + \frac{\beta}{T_0} \left(-\frac{g}{R\beta} \right) Z \quad (6)'$$

ここで圧力 p に inHg 単位の数値を，高度 Z にキロフィート kft 単位の数値を入れ，物理定数と単位換算係数を代入して簡略化すると，

$$p(Z) [\text{inHg}] = 29.92 \times (1 - 0.036 \times Z [\text{kft}]) \approx 29.92 - 1.08 \times Z \quad (6)''$$

式 (6)'' は大気圧が「1000 ft ごとに 1.08 inHg 変化する」ことを示していて，ルール R06 の「1000 ft ごとに 1 inHg 変化する」と比べると違いが大きい。

図 3 に式 (6) の理論値（実線），ルール R06（破線），式 (6)' の線形近似式（2点鎖線）を示す．図の横軸は気圧 p [inHg]，縦軸は高度 Z [kft] である．図 3 から一目して，ルール R06 を適用してよいのは 10,000 ft 程度以下の高度に限られることがわかる．具体的な数値で言い換えると，高度 10,000 ft 以下であればルール R06 の相対誤差は 3% 程度以内に収まる．

式 (6)'' とルール R06 をスプレッドシート上で（紙面の都合でスプレッドシートはここには示さない）精度検証してみると，低高度の $Z < 2000$ ft では式 (6)'' の近似精度がより良く， $Z > 2000$ ft ではルール R06 の近似精度がより良い．

実は次に示すルール R07 においても，解析的に求めたルールよりも暗算しやすい数値に丸めたルールのほうが，より広い高度範囲に適用できるルールとなっている．

R07: 標準大気のもとで TAS の計算

「上昇 1000 ft ごとに CAS (または IAS) を 2% 増しにすると TAS」
(3,4)

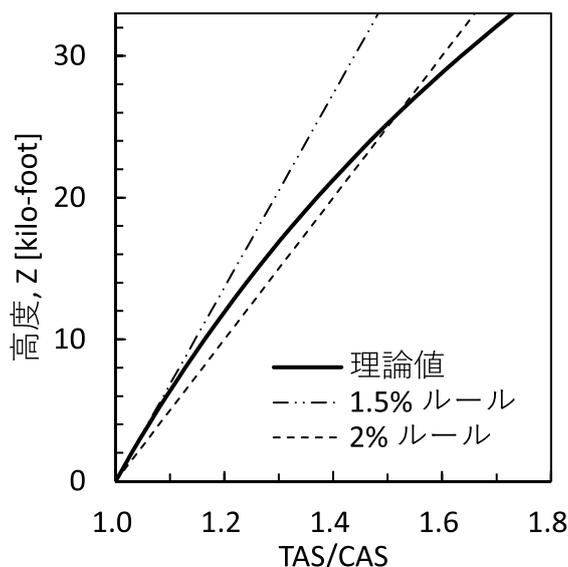


図 4 ルール R07 (CAS から TAS) の近似精度．

標準大気に対する高度 Z [m] と大気圧 p [Pa] の関係式 (6) に対して、完全気体の状態方程式 $p = \rho RT$ を適用すると、高度 Z [m] と空気密度 ρ [kg/m³] の関係を導くことができる⁽²⁾。

$$\frac{\rho_0}{\rho(Z)} = \left[1 + \frac{\beta}{T_0} Z \right]^{\frac{g}{R\beta} + 1} \quad (7)$$

ここで ρ_0 は平均海面上における空気密度で $\rho_0 = 1.225$ [kg/m³] である。これに真対気速度 TAS と等価対気速度 EAS の関係を適用すれば

$$\frac{\text{TAS}}{\text{EAS}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} = \left[1 + \frac{\beta}{T_0} Z \right]^{\frac{1}{2} \left(\frac{g}{R\beta} + 1 \right)} \quad (8)$$

ここで、校正対気速度 CAS と等価対気速度 EAS がほぼ等しいと仮定する。この仮定の是非は後で論じる。さらに校正対気速度 CAS と指示対気速度 IAS がほぼ等しいと仮定すれば (CAS と IAS の差はおおよそ 3% 程度以内と考えられる⁽⁴⁾)、

$$\frac{\text{TAS}}{\text{CAS (or IAS)}} \approx \frac{\text{TAS}}{\text{EAS}} \quad (9)$$

式 (8) に式 (a3) の線形近似を適用して式 (9) を用いると、

$$\frac{\text{TAS}}{\text{CAS (or IAS)}} \approx 1 + \frac{\beta}{T_0} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{R\beta} + 1 \right) Z \quad (10)$$

右辺に物理定数を代入し、高度 Z を m から kft に単位換算すると、

$$\frac{\text{TAS}}{\text{CAS (or IAS)}} \approx 1 + 0.015 \times (Z \text{ [kft]}) \approx 1 + 0.02 \times (Z \text{ [kft]}) \quad (10)'$$

式 (10)' がルール R07 の根拠と考えられる。

図 4 に理論式 (8) と近似式 (10)' の比較を示す。図の縦軸は kft 単位の高度を、横軸は TAS/EAS を示す。ここで記号 / は割り算の意味であり or の意味ではない。また、ここでは $\text{TAS/EAS} \approx \text{TAS/CAS} \approx \text{TAS/IAS}$ を仮定する。図中の実線が式 (8) の理論式を表す。近似式 (10)' のうち係数 1.5% の結果 (1.5% ルール) を 2 点鎖線で、係数 2% の結果 (2% ルール) を破線で、それぞれ図中に示す。破線がルール R07 である。高度 10,000 ft 程度より低いところでは 1.5% ルールの近似精度がより良いが、図 4 から分かるように、すべての高度域にわたって理論値をよく近似するのは 2% ルールのほうである。

校正対気速度 CAS と等価対気速度 EAS が等しいという仮定をおかずに (EAS を計算して)、スプレッドシート上で $\text{IAS} = 100, 200,$

300 kt の 3 ケースに対してルール R07 の予測精度を調べると、全高度域に対して相対誤差 5% 程度以内という結果であった。この誤差には、式 (8) を線形近似したことによる誤差と、CAS が EAS に等しいと仮定したことによる誤差の、両方の誤差が含まれる。

高度 30,000 ft で IAS = 300 kt の場合（飛行マッハ数 0.8 程度）、EAS は CAS より 6% 程度小さくなり、EAS = CAS の仮定が妥当とは言いがたい。ところが EAS が CAS に等しいとすることによる誤差は、線形近似による誤差を打ち消す方向に働く。このため EAS が CAS に等しいと仮定することにより、ルール R07 の予測精度は上述の「全高度域に対して相対誤差 5% 程度以内」よりも改善される。

R08: 標準大気のもとで TAS の計算

「上昇中、IAS 一定では TAS の増加は (7 kt) / (1,000 ft)」⁽¹⁾

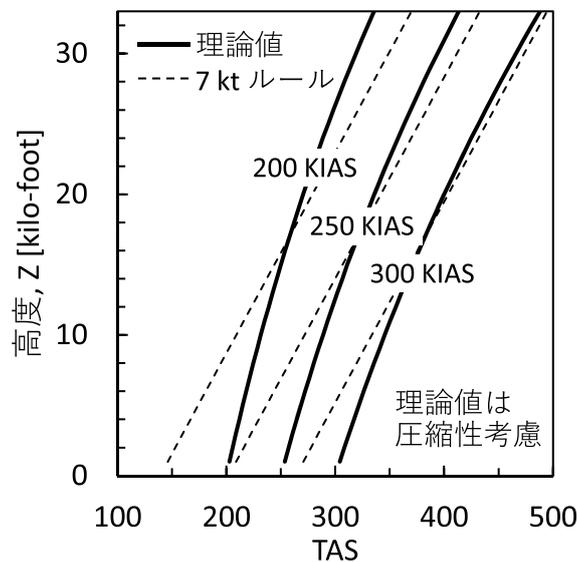


図 5 ルール R08 (IAS 一定時の TAS 変化) の近似精度。

さて、式 (10) からは TAS と CAS (または IAS) との相対的な関係しか分からない。ルール R08 の 7 kt という具体的な数値を出すためには IAS の数値を具体的に指定する必要がある。そこでスプレッドシート上に高度と速度 (IAS) とをパラメタとする表をつくりグラフ化する。結果を図 5 に示す。図の横軸は TAS、縦軸は kft 単位の高度である。図中に IAS = 200, 250, 300 [kt] (KIAS = Knots-Indicated Air Speed) をパラメタとする曲線を示す。実線が式 (8) にもとづく理論値、破線がルール R08 である。理論値の計算にあたって、IAS と CAS は等しいと仮定したが、EAS は CAS (\approx IAS) から計算により求めた。指示対気速度 200 KIAS は高度 16,000 ft で飛行マッハ数 0.4 程度、300 KIAS は高度 32,000 ft で飛行マッハ数 0.8 程度となるので、グラフの表示範囲はおおよそターボプロップ機からターボファン機の巡航速度域となる。

図 5 より、ルール (破線) と理論値 (実線) とは高速・高高度側ではよく一致するが、低速・低高度側ではあまり一致しない。このこと

からルール R08 はターボファン機に適したルールと考えられる．高度 10,000 ft 以上で誤差評価をおこなうと，200, 250, 300 KIAS のそれぞれの場合に対してルール R08 の相対誤差は 10% 以内，6% 以内，3% 以内であった．

R09: 標準大気のもとで TAS の計算

「上昇中，Mach No. 一定では TAS の減少は $(2 \text{ kt}) / (1,000 \text{ ft})$ 」⁽¹⁾

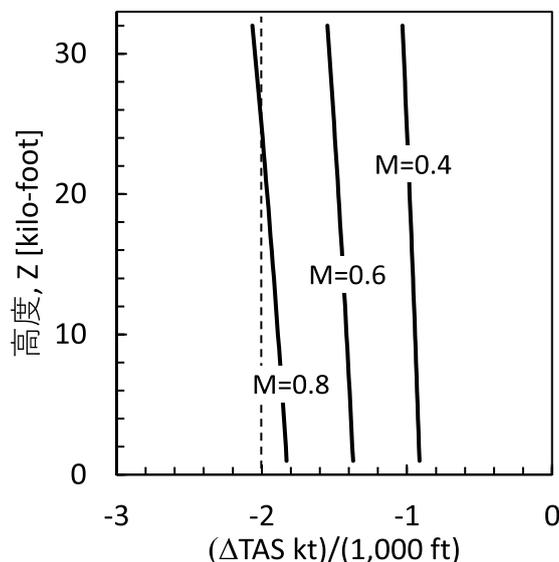


図 6 ルール R09 (マッハ数一定時の TAS 変化) の近似精度．

マッハ数 M ，真対気速度 TAS，音速 a の関係式は $TAS = M \times a$ であり，音速は絶対温度 T [K] の関数として $a = \sqrt{\gamma RT}$ と計算できる．ここで $\gamma = 1.4$ は空気の比熱比， $R = 287$ [J/kg/K] は空気のガス定数である．高度 Z とともに気温が変化するので，気温の関数である音速が変化し，マッハ数を一定に保つと TAS が変化する．スプレッドシート上に高度とマッハ数とをパラメタとする表をつくりグラフ化すると図 6 となる．図 6 の横軸は 1,000 ft ごとの TAS の変化量 Δ TAS を kt 単位で表し，縦軸は kft 単位の高度を表す．図 6 より TAS の変化量が $-2 \text{ kt} / 1,000 \text{ ft}$ となるのはマッハ数 0.8 で高度 20,000–30,000 ft を飛行する場合であることがわかる．したがってルール R09 はターボファン機に対するルールであり，飛行マッハ数が 0.4 程度のターボプロップ機にこのルールを適用してはならない．

R10: TAS の計算

- (a) 「TAS \approx (Flight level) \div 2 + IAS」⁽¹⁾
- (b) 「TAS \approx (Altitude [ft]) \div 300 + IAS」⁽¹⁾

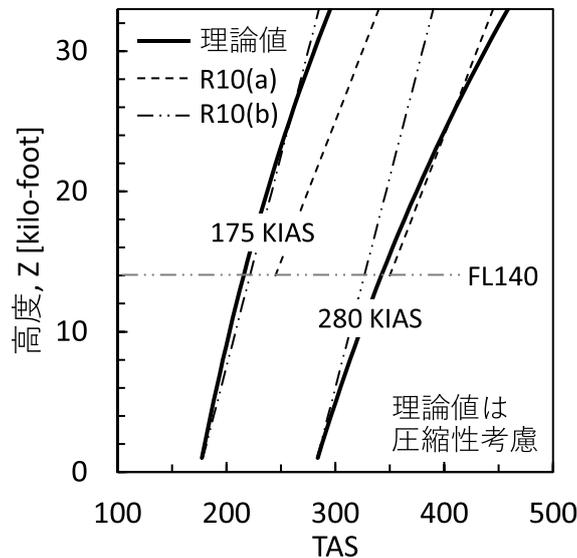


図 7 ルール R10 (IAS 一定時の TAS 変化) の近似精度.

ルール R07 の式 (10)' より

$$TAS \approx IAS + 0.02 \times (Z \text{ [kft]}) \times IAS \tag{10}''$$

であるので、式 (10)'' 右辺第 2 項の IAS を 250 kt に取ればフライトレベルルール R10-(a) が得られ、同 IAS を約 170 kt に取ればアルティテュードルール R10-(b) が得られる。式 (10)'' にはいくつかの種類 of 誤差が同時に含まれるので、これらのルールの予測誤差は必ずしも 250 kt と 170 kt で最小となるわけではない。スプレッドシート上でより詳しく調べてみると、理論値との誤差が最も小さくなるのは、フライトレベルルール R10-(a) においては 280 kt、アルティテュードルール R10-(b) においては 175 kt のときであった。

このときの近似状況を図 7 に示す。図中でルール (破線または 2 点鎖線) と理論値 (実線) がよく一致しているところではルールの近似精度が良く、離れているところではルールの近似精度が悪い。

フライトレベルルール R10-(a) は FL140 以上の高度において、IAS = 280 kt の理論値をよく近似するものの、IAS = 175 kt の理論値からは外れる。高度範囲 14,000–33,000 ft において、高度変化にともなうマッハ数変化を考慮するとき、IAS = 280 kt は飛行マッハ数 0.55–0.79 に相当する。これらのことからフライトレベルルール R10-(a) はターボファン機に適するルールと考えられる。

アルティテュードルール R10-(b) は、FL140 以下の高度においては、IAS = 175 kt の場合も IAS = 280 kt の場合も理論値をよく近似できる。その近似精度はどちらの速度に対しても 5% 程度以下である。また速度を IAS = 175 kt に限れば、すべての高度範囲に対して相対誤差およそ 5% 以下で理論値を近似できる。高度範囲 0–28,000

ft において、高度変化にともなうマッハ数変化を考慮するとき、IAS = 175 kt は飛行マッハ数 0.27-0.46 に相当する。このことからフライトレベルルール R10-(b) はターボプロップ機に適するルールと考えられる。

R11: Ram rise temperature

$$\text{「(Ram rise temperature [}^\circ\text{C})} \approx (\text{Mach No.})^2 \div 2 \times 100\text{」} \quad (1)$$

圧縮性流体力学の結論から、絶対温度 K (ケルビン) で表した全温度 T_T と静温度 T_S の間には、等エントロピ関係式

$$T_T = T_S \times \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right] \quad (11)$$

が成り立つ。ここで $\gamma = 1.4$ は空気の比熱比、 M はマッハ数である。ラム上昇温度は式 (11) の第 2 項 $T_S \times (\gamma - 1) \times M^2 / 2$ を指すので、ルール R11 が厳密に成立するときは $T_S \times (\gamma - 1) = 100$ である。このとき $T_S = 250 \text{ [K]} = -23 \text{ [}^\circ\text{C]}$ となり、標準大気の場合、高度 12,000 ft に相当する。したがってルール R11 の近似誤差は高度 12,000 ft から離れるについて悪くなる。

マッハ数が大きくなるとラム上昇温度の絶対量が増えるので、マッハ数の大きな側で絶対誤差が大きくなる。具体的には高度 33,000 ft 以下において、マッハ数 0.4 のときは絶対誤差 $1 \text{ }^\circ\text{C}$ 程度で近似できるが、マッハ数 0.8 のときは、絶対誤差 $5 \text{ }^\circ\text{C}$ 程度となる。

R12: 飛行距離

$$\text{「1 分間に進出する air distance [nm]} \text{ はマックナンバーの 10 倍」} \quad (1)$$

飛行距離は対地速度 GS で、マックナンバー (マッハ数) は真対気速度 TAS で、それぞれ決まるので、マッハ数から飛行距離を概算するルール R12 は、風向風速を無視して考えていることになる。

さて、マッハ数 $M = \text{TAS} / a$ の分母となる音速 a は気温によって変化し、気温は高度によって変化するので、同じ対地速度であってもマッハ数は高度により変化する。ルール R12 を調べてみると、結果的に 25,000 ft 付近で予測精度がよくなることがわかったので、以下では 25,000 ft を基準に考える。標準大気の 25,000 ft における気温は $-35 \text{ }^\circ\text{C}$ で、このときの音速は $a = 310 \text{ m/s}$ である。このとき、1 分間の飛行距離 GS [nm/min] の計算は、m/s から kt への変換係数が 1.943 であることに注意すると、次のようになる。

$$\text{GS [nm/min]} = \frac{\text{GS [kt]}}{60} \approx \frac{\text{TAS [m/s]}}{310} \frac{310 \times 1.943}{60} \approx 10.0 \times M \quad (12)$$

これがルール R12 である。高度 0-33,000 ft の範囲で、大気の温度変化による音速変化は 10% 程度であり、したがって一定 TAS に対するマッハ数 M の高度変化も 10% 程度であり、ルール R12 の予測精度も 10% 程度である。低高度で予測精度が悪くなるので、ルール R12 の適用範囲を 18,000-33,000 ft に限定すれば、予測精度は 3% 程度にまで向上する。このルールには TAS でなくマックナンバーが

使われていることと、想定高度が高いことから、このルールはターボプロップ機・ターボファン機向けのルールと考えられる。

R13: TAS 変化

「(Mach No.) \pm 0.01 の変化で TAS は \pm 6 kt 変化」⁽¹⁾

マッハ数と TAS の関係は高度（気温）とともに変化する。標準大気に対してマッハ数変化 0.01 が TAS 変化 6 kt に対応する高度を調べると 25,000 ft を得る。先のルール R12 と同様、このルール R13 を全高度範囲に適用すると相対誤差 10% 程度の予測精度であるが、低高度で精度が悪くなる。ルール R13 の適用範囲を 18,000–33,000 ft に限定すれば、その予測精度は 3% 程度にまで向上する。

R14: cross wind component

「(cross wind component [kt]) \approx (drift angle [°]) \times (Mach No.) \times 10」⁽¹⁾

横風成分 V_{cross} [kt] と真対気速度 V [kt] と偏流角 DA [rad] の間には

$$V_{\text{cross}} [\text{kt}] = V [\text{kt}] \times \tan(DA [\text{rad}]) \approx V [\text{kt}] \times DA [\text{rad}] \quad (13)$$

の関係式が成り立つ。ここで最後の線形近似は式 (a5) によるもので、近似式 (13) が精度 10% 以内で成立するためには、表 a1 より偏流角 DA が 0.54 rad (31°) 以内である必要がある。

式 (13) 右辺の速度の単位を kt から nm/min へ、角度の単位を rad から ° に変換すると次の結果を得る。

$$\begin{aligned} V_{\text{cross}} [\text{kt}] &\approx (V [\text{nm/min}] \times 60) \times \left(DA [^\circ] \times \frac{\pi}{180} \right) \\ &= V [\text{nm/min}] \times DA [^\circ] \times \frac{\pi}{3} \end{aligned} \quad (13)'$$

ルール R14 の (Mach No.) \times 10 の項は 1 分間の進出距離 V [nm/min] を表すから (ルール R12), 式 (13)' 右辺の $\pi/3$ を 1 と近似すればルール R14 を得ることができる。ルール R14 には、ルール R12 を適用することの誤差, 式 (a5) の線形近似をおこなうことの誤差, $\pi/3$ を 1 と近似することの誤差, がすべて含まれる。これらすべての誤差をスプレッドシート上で総合評価すると次のようになる。

高度 18,000–33,000 ft の範囲におけるルール R14 の相対誤差は、偏流角が 5, 10, 20, 30° 以内のとき、それぞれ最大で 8, 8, 11, 16% 程度以内であり、低高度になるほど誤差が大きくなる。この相対誤差はマッハ数にはよらない。

R15: descent rate

(a) 「3° の path に必要な (descent rate [fpm]) \approx GS [kt] \times 5」⁽¹⁾

(b) 「(descent rate [fpm]) は (Mach No.) \times 10 \times 100 \times (path [°])」⁽¹⁾

(c) 「Glide slope 3° では (descent rate [fpm]) \approx GS [kt] \times 5 + 50」⁽¹⁾

表記を簡単にするため降下率 descent rate を DR と表す．対地速度 GS の単位を kt から fpm (foot per minute) に変換 (換算係数 101.3) し，角度の単位を度からラジアンに変換すると，

$$DR [\text{fpm}] = (GS [\text{kt}] \times 101.3) \times \tan \left(3 [^\circ] \times \frac{\pi}{180} \right) \approx GS [\text{kt}] \times \frac{101.3 \times 3 \times \pi}{180} \quad (14)$$

最後の式変形には式 (a5) の線形近似を用いた．右辺の定数を計算すると 5.30 となり，これを 5 と丸めるとルール R15-(a) となる．数値を丸めたことによる相対誤差は 6% 程度である．

降下率 DR の表現を少し変えると，

$$\begin{aligned} DR [\text{fpm}] &= (GS [\text{nm/min}] \times 6076) \times \tan \left(\text{path} [^\circ] \times \frac{\pi}{180} \right) \\ &\approx (\text{Mach No.}) \times 10 \times \text{path} [^\circ] \times \frac{6076 \times \pi}{180} \end{aligned} \quad (14)'$$

ここで 6076 は nm から foot への換算係数である．式 (14)' の最後の変形ではルール R12 (式(12)) を用いた．式 (14)' 右辺の定数を計算すると 106.0 となり，これを 100 と丸めるとルール R15-(b) となる．式 (14)' には，数値を 106 から 100 に丸めることによる誤差と，ルール R12 を適用することの誤差がともに含まれる．これらの誤差をスプレッドシート上で合わせて評価すると次のようであった．ルール R15-(b) の相対誤差は，マッハ数によらず，高い高度にいくほど小さくなり，低い高度にいくほど大きくなる．具体的には高度 30,000 ft 以上で相対誤差およそ 5% 以内，高度 17,000 ft 以上で相対誤差およそ 10% 以内，平均海面上でおよそ 15% 前後である．正接 (tan) を線形近似すること (式 (a5)) の誤差は，角度が大きくなるほど大きくなるが，10° 以下の降下角であれば大きな影響はない．

ルール R15-(a) は低高度を飛行する低速機に対しても高高度を飛行する高速機に対しても成り立つが，ルール R15-(b) は高高度を飛行するターボプロップ機・ターボファン機向けルールと言える．

ルール R15-(c) 末尾の「+50」は，ルール R15-(a) の導出において 5.3 を 5.0 と丸めたときに切り捨てた 0.3 を補正する数値と考えられる．補正分を $+50 = +0.3 \times GS$ から逆算すると，進入速度が対地速度 $GS = 50/0.3 = 167 \text{ kt}$ の場合にルール R15-(c) は最も正確となる (相対誤差がほぼゼロとなる)．「+50」の補正効果は低速ではあまり作用せず，例えば侵入速度が $GS = 80 \text{ kt}$ のとき，ルール R15-(c) の予測誤差はルール R15-(a) とほぼ同じで，約 6% である．

R16: RAT

「Descent 時 (RAT が 10 °C 以上となる高度 [ft]) \approx (地上気温 [°C]) $\times 1000$ (※10,000 ft 以上 300 kt, 10,000 ft 以下 250 kt)」⁽¹⁾

以下に示す導出過程から判断して，このルールは正しくは「(地上気温 [°C]) $\times 1000 \div 2$ 」($\div 2$ が必要) である．

また，全温度 TAT, total air temperature は流れを断熱的にせき止めたときの温度，ラムエア温度 RAT, ram air temperature は流れを実際

にせき止めたときに温度計が示す温度で，両者の間には熱損失分の差異が存在するが，ルール R16 を考察するときには両者を等しいものとして扱う．

さて，地表面温度が変わっても気温減率 β は標準大気と同じと仮定する．気温減率は $\beta = 2 [^{\circ}\text{C}/\text{kft}]$ であるので，平均海面上 MSL の温度を $T_{\text{MSL}} [^{\circ}\text{C}]$ と表すとき，高度 $H [\text{ft}]$ における大気の静温度は $(T_{\text{MSL}} - \beta \times H/1000) [^{\circ}\text{C}]$ と表現できる．

飛行マッハ数が M のとき，全温度と静温度のあいだには式 (11) の関係式があるので，

$$T_{\text{total}} [^{\circ}\text{C}] + 273 = \left(T_{\text{MSL}} [^{\circ}\text{C}] - H [\text{ft}] \times \frac{2}{1000} + 273 \right) \times \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \quad (15)$$

これを高度 H について解くと，

$$H [\text{ft}] = T_{\text{MSL}} [^{\circ}\text{C}] \times \frac{1000}{2} + \frac{273 \times 0.2 \times M^2 - T_{\text{total}} [^{\circ}\text{C}]}{1 + 0.2 \times M^2} \times \frac{1000}{2} \quad (15)'$$

ここでルール R16 が成立する条件，すなわち「 T_{total} が $10 [^{\circ}\text{C}]$ となるときの高度 $H [\text{ft}]$ が $1000 \times T_{\text{MSL}} [^{\circ}\text{C}] / 2$ となる」ための条件は，式 (15)' の右辺第 2 項がゼロとなることである．このとき $273 \times 0.2 \times M^2 - 10 = 0$ より，飛行マッハ数 $M = 0.43$ が得られる．したがってこのルール R16 はターボプロップ機向けのルールである．

標準大気を仮定し，高度 10,000 ft の気温を用いて音速を算出し，飛行マッハ数 $M = 0.43$ を真対気速度 TAS に換算すると 275 kt 程度となる．ルール R16 は飛行マッハ数が $M = 0.43$ であれば高度によらず成立する．飛行マッハ数が一定のとき，高度の増加とともに IAS は減少するので，ルール R16 に付記されている「10,000 ft 以上 300 kt, 10,000 ft 以下 250 kt」の文言は，以上と以下の指定が逆と考えられる．

R17: Runway in sight する glide slope 上の高度

「PATH 3° では(高度 [ft]) \approx (VIS [m]) \div 6」⁽¹⁾

降下角 3°，視程 VIS [m] のとき滑走路を視認できる高度 h [ft] は

$$h [\text{ft}] = (\text{VIS} [\text{m}] \times 3.28) \times \tan \left(3 [^{\circ}] \times \frac{\pi}{180} \right) \approx \text{VIS} [\text{m}] \times \frac{3.28 \times 3 \times \pi}{180} \quad (16)$$

ここで 3.28 は m から foot への換算係数である．最後の式変形には式 (a5) の線形近似を用いた．右辺の定数を計算すると 1/5.82 となって，5.82 を 6 と丸めればルール R17 を得る．数値を丸めたことによる相対誤差は 3% 程度である．

3. 結論

主として AIM Japan に記載のルール・オブ・サムについてルールの導出をおこない、理論解または定義式にもとづいてルールの予測精度を相対誤差で示し、ルールを適用できる速度範囲と高度範囲を示した。解析の結果、以下のことが明らかとなった。

- ルールの多くは理論解に対する線形近似、または単位換算係数の小数点以下を丸めたもの、あるいはそれらの組み合わせである
- ルールの多くは予測精度 10% 程度以内で暗算できるように考えられたルールとなっている
- ルールを使用可能な高度範囲や速度範囲が明記されていないルールの利用には注意が必要である

謝辞

いくつかのルールの導出について、航空大学校の元教授である市川明夫博士にご指導いただいたことが、本研究を始める端緒となりました。ここに謝意を表します。

引用文献

- (1) AIM-JAPAN 編纂協会 編. Aeronautical Information Manual - JAPAN 第 70 号. 日本航空機操縦士協会, 2019.
- (2) International Civil Aviation Organization. Manual of the ICAO Standard Atmosphere, extended to 80 kilometers, third edition. ICAO Doc 7488/3. 1993.
- (3) 秀嶋卓. 航空計器入門 第 3 版. 九州大学出版会, 1999.
- (4) 比良二郎. 飛行の理論. 廣川書店, 2000.

付録

本論ではルール導出に関数の線形近似（1 次の項までの級数展開）を多用する。まず関数 $f(x)$ を $x=0$ 近傍で級数展開（マクローリン展開）すると、

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{a1})$$

ここで $f^{(n)}$ は関数 $f(x)$ の n 次導関数を表す。関数 $f(x)$ の線形近似とは、変数 x が十分に小さいとき ($|x| < 1$) に、 x の 2 次以上の項 (x^2, x^3, \dots) を無視し、次のように近似することをいう。

$$f(x) \approx f(0) + f^{(1)}(0)x \tag{a2}$$

これは曲線 $f(x)$ に対し $x=0$ で接線を引いて、 $x=0$ 近傍で直線近似することと同義である。具体例として、本論で最もよく用いるのが次の近似である。

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad (|x| < 1) \tag{a3}$$

また別の例として、ルール R05 の導出に用いた近似は

$$\tan^{-1}x \approx x \quad (|x| < 1) \tag{a4}$$

あるいはルール R14 の導出に用いた近似は

$$\tan x \approx x \quad (|x| < 1) \tag{a5}$$

これらの線形近似の誤差を 1, 5, 10, 20% 以内とするための x の範囲は以下の表 1 のとおりである。

表 a1 近似式 (a3)-(a5) の指定精度に対する変数 x の値。

	1%	5%	10%	20%
式 (a3)	0.11	0.29	0.46	0.81
式 (a4)	0.17	0.40	0.57	0.84
式 (a5)	0.17	0.39	0.54	0.76